3　光の屈折の実験の解説

3.1　考察

■光の屈折の性質は成り立っていたか・屈折率は定数になるか　各グループの実験結果をまとめよ。屈折性確認・定数性確認のところには、各性質が成り立っていたかを記入せよ。

グループ	1	2	3	4	5	6	7
屈折性確認							
定数性確認							
データ数							
屈折率 n							

8	9	10	11	12	13	14	15	16

光の屈折の性質は　　　　　　&　屈折率は定数に

■屈折率が定数にならないこともある理由

- 測定の誤差によるもの
  - 測定したデータ数が少なかったことによる誤差
  - ピンの太さによる点の位置の誤差
  - 線の太さによる交点の位置の誤差

  - 円が小さかったことによる K_1H_1, K_2H_2 の長さの誤差
  - 定規で長さを測るときの誤差
  - ガラスが完全な直方体でなかったことによる誤差
- ガラスの中身が一様でなかったこと（詳しいことはを参照）

他に考えられる要因をあげてみよう

などの要因が考えられる。

ある物理量を同じ条件の下で N 回測定したとき、測定値が $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_N$ だったとしよう。もし、「完璧な測定」ができたなら、これらの値は常に 1 つ（x としよう）に定まる。この神のみぞ知る理想的な値を**真の値**という。実際には、測定値 $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_N$ はばらつく。測定値 x_i（$i=1,\ 2,\ \ldots,\ N$）と真の値 x との差を**誤差**という。真の値は求まらないので、ふつうは測定値から求めたもっとも確からしい値（x_0 としよう）を用いる。この値を**最確値**という。直接測定の場合、最確値 x_0 は $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_N$ の平均値 $m=(x_1+x_2+\cdots+x_N)/N$ と一致する。真の値が求まらないために、誤差も求められないので、測定値 x_i（$i=1,\ 2,\ \ldots,\ N$）と最確値 x との差を**残差**として定義する。

一般に、N 回直接測定すると、平均値 m と真の値 x との差の大きさ $|m-x|$ は $1/\sqrt{N}$ に比例する。つまり、**平均値 m の平均誤差は $1/\sqrt{N}$ に比例する**。そのため、N を大きくすればするほど誤差はどんどん 0 に近づき、平均値と真の値が近づく。だが、「やみくもに N を増やせばいい」というものでもない。例えば、測定回数を 100 倍にしても、平均値の平均誤差は 1/10 にしかならない。

誤差の生じる原因はいくつかあるが、次の 3 種類に大別できる。

1. **系統誤差**
   (a) 器機の癖・不完全などによって生じるもの
   (b) 測定者の癖によるもの
   (c) 理論の不完全または近似によるもの
2. **偶然誤差**
   (a) 測定者の支配または関知しえない条件や環境の微細な変化などによる原因不明の誤差
3. **過失誤差**
   (a) 測定者の不注意などによるもの

例として、ノートの横幅をはかるときの誤差を考えよう。3 種類の誤差は次のとおりである。

- 1 つ目は、ノートのけばだちや目盛りの読み取りの不確かさが原因となる誤差である。この誤差が**測定値を大きくする方向に働くか小さくする方向に働くかは偶然によって決まる**。このような**偶然による誤差**が偶然誤差である。
- 2 つ目は、定規の伸縮による誤差である。定規が金属製だと、気温が高いときに伸びてしまう。すると、暑い日にはノートの横幅が**常に**短く測定されてしまう。このような**偶然によらない、一定の傾向を持った誤差**のことが系統誤差である。
- 3 つ目は、目盛りの読み間違いによる誤差である。このような**測定ミスや過失による誤差**を過失誤差という。

これらの誤差は次のような特徴を持つ。

- **偶然誤差だけはいくら注意しても人為的に取り除くことは不可能**であって、測定には必ず現れる。
- 系統誤差は、その原因を究明すれば、あらかじめ避けることができたり、後から補正して取り除いたりすることができる。
- 過失誤差は、十分に注意して測定を行ない、測定結果を検討すれば取り除ける。

そこで、誤差として取り除くことが難しい偶然誤差のみを取り扱うことにしよう。

過失誤差・系統誤差を考えなくてよい場合（つまり、偶然誤差だけに注目すると）、誤差と誤差の出る確率との関係は、N が十分大きいとき図 1 のようなグラフに近づくことが知られている。（これは、**中心極限定理**という数学的な定理に基づいた主張である。中心極限定理の内容の物理的意味を簡単にまとめると、「1 回の実験で何個かの “測定値” がばらばらに分布していても、この測定値の “平均値” を（さらに実験して）たくさん用意すると、“測定値の平均値” は規則的に分布する」ということである。）この誤差の散らばり具合はガウス分布とよばれる。

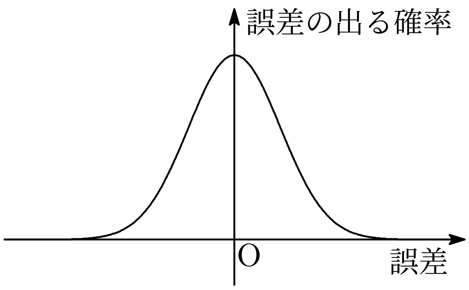


図 1　ガウス分布のグラフ

グラフを見れば分かるように、誤差の現れ方には次の傾向が見られる。

1. 絶対値の等しい正の誤差と負の誤差は同じ頻度で現れる。
2. 絶対値の小さい誤差は絶対値の大きい誤差に比べて現れる頻度が多い。
3. 絶対値がある程度以上大きい誤差は現れない。

この 3 つの性質は**誤差の 3 法則**とよばれる。実は、今の説明とは逆に、「誤差の 3 法則」と「直接測定する場合、最確値が平均値と一致すること」を仮定すれば、誤差の散らばり具合がガウス分布となることが導ける。

今回の実験では、次に述べるようなことは起こらないと考えてよい。とはいえ、結果そのものは興味深いので一応確認しておく。

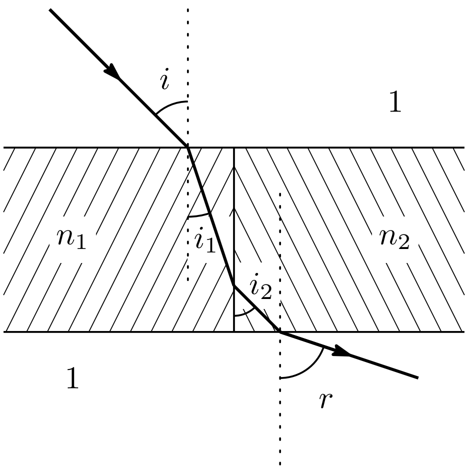


図 2　ガラスの中身が一様でない場合

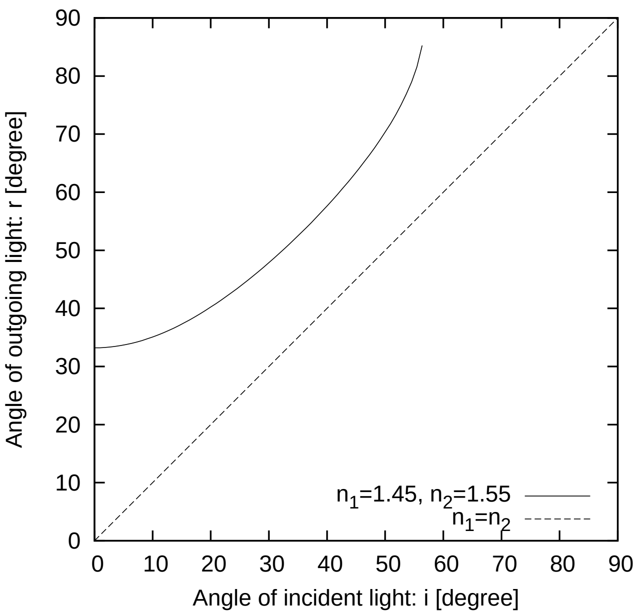


図 3　入射角と透過する光の角度

ガラスの中身が一様でない図 2 のようなモデルを考えよう。次回ので紹介する sin の記号を用いると、各角度が 0° から 90° の範囲にあるとして、次の 3 式

$$\sin i = n_1 \sin i_1 \tag{3.1.1}$$
$$n_1 \sin(90^\circ - i_1) = n_2 \sin(90^\circ - i_2) \tag{3.1.2}$$
$$n_2 \sin i_2 = \sin r \tag{3.1.3}$$

が成立することが分かる。簡単な計算により、

$$\sin r = \sqrt{n_2^2 - n_1^2 + \sin^2 i} \tag{3.1.4}$$

を得る。明らかに、$n_1 = n_2$ のとき $\sin r = \sin i$ であるから、$r = i$ である。

$n_1 \neq n_2$ のとき $n_2^2 - n_1^2 \neq 0$ より、一般には $r \neq i$ となる。これを $n_1 = 1.45,\ n_2 = 1.55$ としてグラフにしたものが図 3 である。**2 つの物体の屈折率が近い値であっても、入射角とガラスを出る角が一致しない**ことが見てとれる。ガラスに入射する光とガラスを透過する光が平行にならないので、必然的に、屈折率もうまく求まらない。

■実験を行うに当たって工夫したことは何か　こんな工夫の例があがるとよい。

- 誤差を減らす
  - 測定するデータを増やす[*1]

[*1] ただし、「やみくもに増やせばいい」というものでもない。

  - 細いピンを使う
  - 先の細いペンを使って線を引く
  - 円はなるべく大きく描く（必然的に K_1H_1, K_2H_2 も長くなる）
  - 定規を最小目盛の 1/10 まで読み取る
  - 職人にガラスを加工してもらう[*2]
- 測定をしやすくする
  - あらかじめ、使う枚数の方眼紙に同じ大きさの円を描いておき、その円の上にピンをさす
  - 円の大きさを（5 cm, 10 cm など）キリのいい数字にしておく

他に考えられる工夫をあげてみよう

3.2　おまけの質問

■水の屈折率はどのようにして求められるか　「ちびまるタン」を使えばできる。

■ガラスに入射する光とガラスを透過する光が平行になるのはなぜか　空気に対するガラスの屈折率を n とすると、屈折率の定義[*3]から

$$\frac{\mathrm{K_1H_1}}{\mathrm{K_2H_2}} = n, \quad \frac{\mathrm{K_1'H_1'}}{\mathrm{K_2'H_2'}} = n \tag{3.2.5}$$

である。ただし、図 4 において 2 つの円の半径は同じ大きさにとる。辺々を割り算して、

$$\frac{\mathrm{K_1H_1}}{\mathrm{K_2H_2}} \div \frac{\mathrm{K_1'H_1'}}{\mathrm{K_2'H_2'}} = \frac{n}{n}, \quad \therefore \frac{\mathrm{K_1H_1}}{\mathrm{K_2H_2}}\frac{\mathrm{K_2'H_2'}}{\mathrm{K_1'H_1'}} = 1 \tag{3.2.6}$$

[*2] 「実験物理屋さん」は、「職人さん」に実験器具の作製を依頼することがしばしばある。残念ながら、今回の実験では無理だが。

[*3] 屈折率を求めるために描く円の半径の大きさはいくつでもよかった。

を得る。明らかに[*4]、$\triangle \mathrm{OH_2K_2} \equiv \triangle \mathrm{O'H_2'K_2'}$ より

$$\mathrm{K_2H_2} = \mathrm{K_2'H_2'} \tag{3.2.7}$$

となることに注意すると、(3.2.6) から

$$\mathrm{K_1H_1} = \mathrm{K_1'H_1'} \tag{3.2.8}$$

が分かる。したがって、ガラスに入射する光とガラスを透過する光は平行になる。

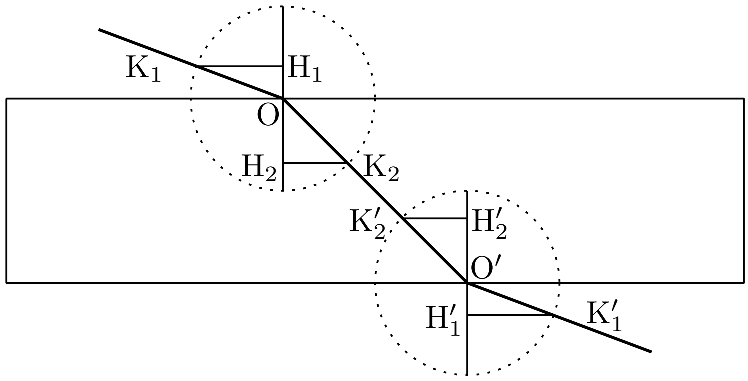


図 4　入射する光と透過する光の平行性

$\triangle \mathrm{OH_2K_2} \equiv \triangle \mathrm{O'H_2'K_2'}$ の証明

$\triangle \mathrm{OH_2K_2}$ と $\triangle \mathrm{O'H_2'K_2'}$ について考える。このとき、

- 平行線の錯角が等しいので、$\mathrm{OH_2} \parallel \mathrm{O'H_2'}$ より、$\angle \mathrm{K_2OH_2} = \angle \mathrm{K_2'O'H_2'}$
- 「図 4 において 2 つの円の半径は同じ大きさにとる」という仮定より、$\mathrm{K_2O} = \mathrm{K_2'O'}$
- $\angle \mathrm{K_2OH_2} = \angle \mathrm{K_2'O'H_2'}$ および $\angle \mathrm{OH_2K_2} = \angle \mathrm{O'H_2'K_2'} = 90°$ であることに注意すると、三角形の内角の和が一定であるから、$\angle \mathrm{H_2K_2O} = \angle \mathrm{H_2'K_2'O'}$

となる。まとめると、

$$\begin{cases} \angle \mathrm{K_2OH_2} = \angle \mathrm{K_2'O'H_2'} \\ \mathrm{K_2O} = \mathrm{K_2'O'} \\ \angle \mathrm{H_2K_2O} = \angle \mathrm{H_2'K_2'O'} \end{cases}$$

が成立する。よって、二角挟辺より $\triangle \mathrm{OH_2K_2} \equiv \triangle \mathrm{O'H_2'K_2'}$ となる。■

[*4] 「明らかに」という言葉は、「説明するのが面倒くさい」か「本当に分からない」ときだけに使う。ここでの使い方は前者の方である。

■入射角が小さいときと大きいときとでは、どちらが真の屈折率からの誤差が大きいか

厳密にやろうとすると難しい。$\mathrm{K_1H_1}$ の誤差が大きければ真の屈折率からの誤差は大きくなり、$\mathrm{K_1H_1}$ の誤差が小さければ真の屈折率からの誤差は小さくなる。そこで、**$\mathbf{K_1H_1}$ の長さだけに注目しよう**。

入射角が小さいとき　　　**入射角が大きいとき**

（ここの注釈は高校生になってから読んでほしい。図による説明と本質的に同じことをやっているので、今は式の意味が分からなくてもよい。）

$\mathrm{K_1H_1}$ の長さを l、その誤差を $\mathit{\Delta} l$ とおく。入射角が i のとき $l = \sin i$ であるから、入射角の誤差 $\mathit{\Delta} i \ll 1$ に対して、

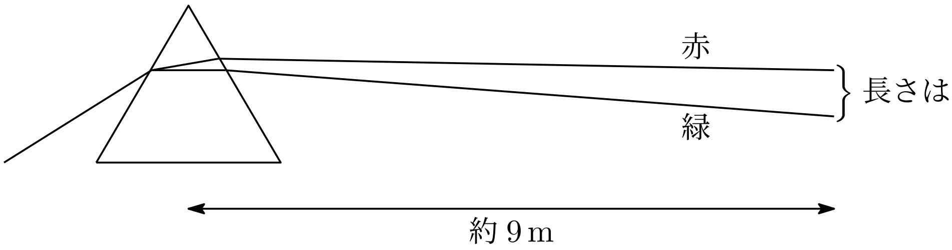
$$\begin{aligned}\mathit{\Delta} l &= \sin(i + \mathit{\Delta} i) - \sin i = \sin i \, \cos \mathit{\Delta} i + \cos i \, \sin \mathit{\Delta} i - \sin i \\ &\approx \sin i \times 1 + \cos i \times \mathit{\Delta} i - \sin i = \cos i \, \mathit{\Delta} i\end{aligned}$$

となる。$\mathit{\Delta} i$ を固定すると $i : 0^\circ \to 90^\circ$ のとき $\cos i : 1 \to 0$ より、i が大きいほど $\mathit{\Delta} l$ は小さくなる。

■「同じ物体ならば、すべての色の光に対して屈折率は定数である」という主張は妥当か

「同じ物体ならば、すべての色の光に対して屈折率は定数である」という主張は（厳密には）妥当ではない。前回の演示実験から分かったように、プリズムに赤色のレーザー光と緑色のレーザー光を通すと、赤色のレーザー光よりも緑色のレーザー光の方が大きく屈折した。だが、人間の目に見える光の範囲に関していえば、色による屈折率の差は小さいのであまり気にしないことも多い。

前回の実験の図



一般に、ガラスや水に光を通すとき、赤色の光ほど屈折率が小さく、紫色の光ほど屈折率は大きくなる。このように、**入射した光線が光の色ごとに別々に分離される現象**を**分散**という。これを応用したものに次のようなものがある。

具体例 3.1 プリズムによって光を分けることができる

図

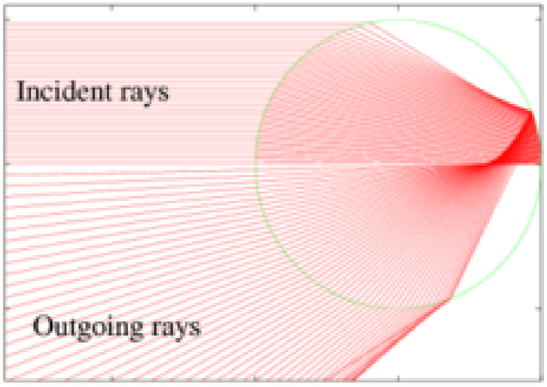
光を波長によって分けた（分光した）ものを、光の**スペクトル**という。赤・橙・黄・緑・青・藍・紫[*5]の順に並んだ光の帯が見られる。

---

*5 「せきとうおうりょくせいらんし」と読む。海外では虹の色は必ずしも 7 色ではない。

具体例 3.2 虹の原理

図



光は波の一種であり、光の色はその波の繰り返しの長さ（波長）によって決まる。各色の波長は、だいたい表 1 のようになっている。ここで用いた nm（ナノメートル）という単位は、$1\,\mathrm{nm} = 10^{-9}\,\mathrm{m}$ を表す。

表 1　各色の波長

波長 [nm]	400	435	480	490	500	560	580	595	610	750	800
色	紫	青	緑青	青緑	緑	黄緑	黄	橙	赤	赤紫	

同じ物体を通る光の屈折率 n と、光の色（波長 λ [*6]）の関係は

$$n^2 = a + \frac{b}{\lambda^2} + \frac{c}{\lambda^4} + \frac{d}{\lambda^6} + \cdots - b'\lambda^2 - c'\lambda^4 - d'\lambda^6 - \cdots \tag{3.2.9}$$

という式で近似できる。ここで、$a,\ b,\ b',\ c,\ c',\ d,\ d',\ \ldots$ は定数である。水の屈折率の場合、波長依存性は図 5 のようになる。

[*6] λ はギリシャ文字の 1 つで、lambda（ラムダ）と読む。漢字の “入” ではない。

人間の目に見える光の波長は 380 nm〜780 nm であるが、この領域では屈折率が波長にあまり依存せず、1.33 程度であることが分かる。

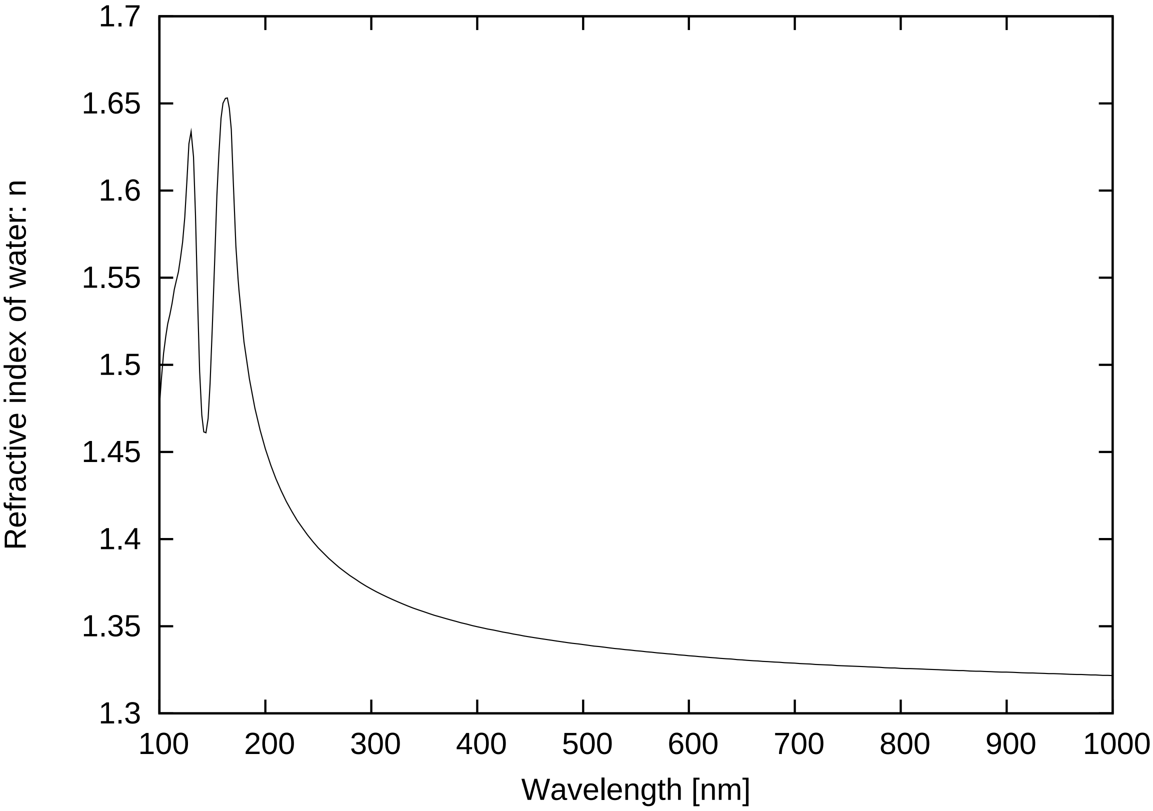


図 5　水の屈折率の波長依存性（David J. Segelstein, "The complex refractive index of water," (University of Missouri-Kansas City, 1981) よりデータを引用）

3.3　まとめ

- 光の屈折の性質は　　　　　　　　& 　屈折率は定数に
- 実験の　　　　を減らすためにデータを　　　　　　のがよい
- ガラスや水に光を通すとき、
  赤色の光ほど屈折率は
  紫色の光ほど屈折率は